SUGESTÕES DE RESPOSTAS PARA AS QUESTÕES ABERTAS – APLICAÇÃO: 10/01/2005

ÁREA 1

Matemática

1. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$
$B = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$
$C = \{0, 5, 10, 15, ...\}$

$B - (A \cup C) = \{3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69, ...\}$

Os 10 menores números que pertencem a $B - (A \cup C)$ são: 3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63 e 69.

2. Sejam x e y os números dados.

$$\begin{cases} x + 2y = 30 \\ P = xy \text{ é máximo} \end{cases}$$

$x = 30 - 2y$

$P = xy = (30 - 2y) \,.\, y = 30y - 2y^2$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-30}{-4}, -\frac{900}{-8}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{225}{2}\right)$$

O maior valor do produto é $\frac{225}{2} = 112{,}5$

3.

$$\left|x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}\right| = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\mathrm{I})\, x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} = \frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ (\mathrm{II})\, x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Resolvendo (I), temos:

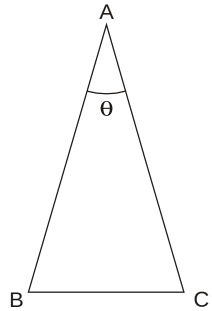
$$8x^2 - 10x + 3 = 0 \xrightarrow[(\Delta = 4)]{} x = \frac{10 \pm 2}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Resolvendo (II), temos:

$$8x^2 - 10x + 7 = 0 \xrightarrow[(\Delta = -124)]{} \nexists x \in \mathbb{R}$$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$

4.



Seja θ o ângulo do vértice. Então: $\text{tg}\,\theta = 2\,\text{sen}^2\,\theta$

Temos: $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 2\,\text{sen}^2\,\theta \xRightarrow{0<\theta<\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos\theta} = 2\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 1 \ \Rightarrow\ \text{sen}\,2\theta = 1 \ \Rightarrow\ 2\theta = \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

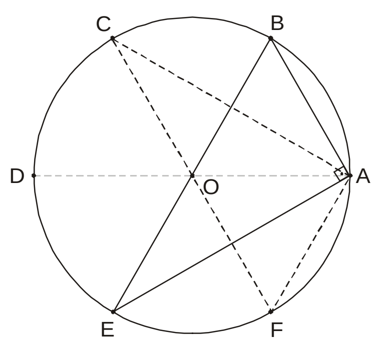
Como $(\pi - \theta)$ é a soma dos ângulos da base, então $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Usando o Teorema de Laplace pela 1ª coluna:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & (n-1)! & -1 \\ 0 & n! & n \\ -1 & (n-1)! & 1 \end{vmatrix} = 1.(n! - \underset{\substack{\uparrow \\ n!}}{n(n-1)!}) + 0 - (\underset{\substack{\uparrow \\ n!}}{n(n-1)!} + n!) = -(n! + n!) = -2n!$$

$\det M = -240 \Longrightarrow -2n! = -240 \Longrightarrow n! = 120 \Longrightarrow n = 5$

6.



Cada diagonal do hexágono determina, com os outros vértices, 4 triângulos retângulos.
Como o hexágono tem 3 diagonais, então seus vértices determinam 4.3 = 12 triângulos retângulos.

$$p\,(\text{triângulo ser retângulo}) = \frac{n\,(\text{triângulo ser retângulo})}{n\,(\text{casos possíveis})} = \frac{12}{C_{6,3}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \text{ ou } 60\%$$

7. Sejam $\begin{cases} x: \text{medida da largura da sala} \\ y: \text{medida do comprimento da sala} \\ d: \text{medida do diâmetro do tapete} \end{cases}$

Dados : $\begin{cases} (\text{I}): 2x + 2y = 25 \\ (\text{II}): \dfrac{d}{x} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow x = \dfrac{9}{4}\,d \\ (\text{III}): \dfrac{d}{y} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = 4\,d \end{cases}$

Substituindo (II) e (III) em (I), temos: $2\,.\,\dfrac{9}{4}d + 2\,.\,4\,d = 25 \;\Rightarrow\; d = 2\text{ m} \xrightarrow[d\,=\,2r]{} r = 1\text{ m}$

Logo, $\begin{cases} x = \dfrac{9}{4}\,.\,2 \Rightarrow x = 4{,}5\text{ m} \\ y = 4\,.\,2 \Rightarrow y = 8\text{ m} \end{cases}$

Como a área da sala é $A_1 = x\,.\,y$, ou seja, $A_1 = 36\text{ m}^2$ e a área do tapete é $A_2 = \pi r^2$, ou seja, $A_2 = \pi\,.\,1^2 = 3{,}14\text{ m}^2$, temos a área procurada: $A = A_1 - A_2 \;\Rightarrow\; A = 36\text{ m}^2 - 3{,}14\text{ m}^2 = 32{,}86\text{ m}^2$

8. $V_{\text{água}} = \dfrac{2}{3}\,V_{\text{tanque}} \;\Rightarrow\; V_{\text{água}} = \dfrac{2}{3}\,.\,x\,(x + 0{,}5)\,(x + 1)\text{ m}^3$

A área total da superfície do tanque é igual a $23{,}5\text{ m}^2$, ou seja,

$2\,.\,x\,(x + 0{,}5) + 2\,.\,x\,(x + 1) + 2\,.\,(x + 0{,}5)\,(x + 1) = 23{,}5 \;\Rightarrow 2x^2 + x + 2x^2 + 2x + 2x^2 + 3x + 1 = 23{,}5 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 6x^2 + 6x - 22{,}5 = 0 \;\Rightarrow\; 4x^2 + 4x - 15 = 0 \xrightarrow[\Delta\,=\,256]{} x = \dfrac{-4 \pm 16}{8} \xrightarrow[x\,>0]{} x = 1{,}5\text{ m}$

Logo, $V_{\text{água}} = \dfrac{2}{3}\,.\,(1{,}5\text{ m})\,.\,(2\text{ m})\,.\,(2{,}5\text{ m}) = 5\text{ m}^3 = 5\,000$ litros

9. Se $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, então $\overline{z} = x - y\,i$.

Substituindo esses valores na equação $i \,.\, z + 2 \,.\, \overline{z} = -1 + i$, temos:

$i\,(x + y\,i) + 2\,(x - y\,i) = -1 + i \;\Rightarrow (2x - y) + (x - 2y)\,i = -1 + i$

Pela definição de igualdade de números complexos, vem:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = -1$$

Logo, $z = -1 - i$

O módulo de z é $\left| z \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

θ, argumento principal de z, é tal que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{4}$

Portanto, $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

10. Dadas $\begin{cases} \lambda : x^2 + y^2 = 125 \\ r : x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$

A equação do feixe de paralelas à reta r é $x - 2y + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Pede-se uma reta t, desse feixe, tal que a distância do centro C, de λ, a t seja igual ao raio de λ.

O centro de λ é C(0;0) e o raio é $r = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Logo, $d_{C,t} = \left| \dfrac{0 - 2\,.\,0 + m}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right| = 5\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad |m| = 25 \quad \Rightarrow \quad m = 25$ ou $m = -25$

Assim, as equações procuradas são: $x - 2y + 25 = 0$ e $x - 2y - 25 = 0$.